Wiederholung Fouriertransformation

Ziel: Berechne Spektrum eines beliebigen zeitlichen Signals

Definition:
$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{FT}[x(t)](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \tilde{x}(\omega) \\ \mathcal{FT}^{-1}[x(t)](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega)\, e^{+i\omega t}\, d\omega = x(t) \end{aligned}}$$
(inverse Fourier-Trafo)

- Hinweis: wenn möglich sin, cos - Funktionen in e^{i}-Anteile zerlegen und dann integrieren
- nützliche Eigenschaften:

$$\mathcal{FT}\left(\frac{d}{dt} x(t)\right) = i\omega\, \mathcal{FT}\left(x(t)\right)$$

$$\propto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \overset{\text{P.I.}}{=} \underbrace{x(t)\, e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{\to 0} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$\Rightarrow$ Im Frequenzraum lässt sich häufiger leichter rechnen, da Zeitableitungen durch „$i\omega$" ersetzt werden

- für $x(t) \in \mathbb{R}$ gilt $\tilde{x}(-\omega) = \tilde{x}^*(\omega)$ (Symmetrie)

- $\mathcal{FT}[f * g](\omega) = \mathcal{FT}[f](\omega) \cdot \mathcal{FT}[g](\omega)$

wichtig für Responsefunktionen siehe Kapitel 1.5

Faltung: $f * g\,(t) = \int f(t-\tau) \cdot g(\tau)\, d\tau$

Feldausbreitung im Material

Maxwell-Gleichungen in Materie

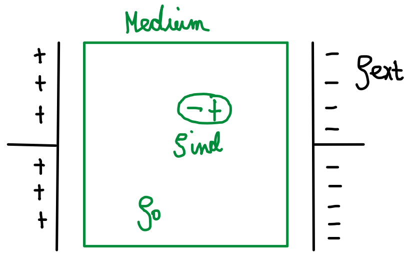
- wir gehen zunächst von den allgemeinen Maxwell-Gleichungen aus:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{ges} = \frac{\rho_{ges}}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E}_{ges} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_{ges} = 0$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_{ges} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B}_{ges} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_{ges} = \mu_0 \vec{j}_{ges}$$

↳ Der Index „ges" bedeutet, dass wir hier alle möglichen Quellen und Felder berücksichtigen

- Platzieren wir nun ein Medium in einen Kondensator, so lässt sich ρ_{ges} schreiben als

$\rho_{ges} = \rho_0 + \rho_{ext} + \rho_{ind}$



ρ_0 - Ladungsdichte des Mediums
(meistens sind die Medien ungeladen $\rho_0 = 0$)

ρ_{ext} - externe Ladungen auf den Kondensatorplatten
→ makroskopisch messbar

ρ_{ind} - induzierte Polarisationsladungen → mikroskopisch
↳ Response des ungeladenen Materials auf ein äußeres Feld

⇒ ρ_{ges} und E_{ges} sind nun mikroskopische Größen
⇒ die messbaren Felder erhalten wir durch räumliche Mittelung $E = \langle E_{ges} \rangle$

Charakterisierung der Material-Response:
- linearer Zusammenhang zwischen Störung und Response $\vec{E}_{ind} \propto \vec{E}_{ext}$

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{ind} \propto \vec{E}_{ext}$$

- dies ist eine Lineare Abbildung, die wir durch eine Matrix beschreiben

$$\boxed{\vec{E} = \varepsilon^{-1} \vec{E}_{ext} \qquad \vec{B} = \vec{\mu}\, \vec{B}_{ext}}$$

ε - Dielektrizität
μ - Permeabilität
des Materials

- die induzierten Felder können wir ebenfalls auch durch makroskopische Größen ausdrücken

$$\vec{P}(\vec{r},t) := \frac{\text{elektrisches Dipolmoment}}{\text{Volumen}} \quad \text{Polarisation} \quad \operatorname{div} \vec{P} = -\rho_{ind}$$

$$\vec{M}(\vec{r},t) := \frac{\text{magnetisches Dipolmoment}}{\text{Volumen}} \quad \text{Magnetisierung} \quad \underbrace{\operatorname{rot} \vec{M}}_{=0 \text{ in Optik}} = \vec{j}_{ind} - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad \Rightarrow \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{j}_{ind}$$

siehe Kapitel 1.3

- die gemittelten $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder lassen sich noch mit den Response-Funktionen verbinden

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r},t) &:= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \\ \vec{H}(\vec{r},t) &:= \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{B} \end{aligned}}$$

Damit lassen sich nun die makroskopischen Maxwell-Gleichungen herleiten

$$\varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho_{ext} + \rho_{ind} = \rho_{ext} - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\underbrace{(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}_{\vec{D}} = \rho_{ext}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} - \underbrace{\mu_0 \frac{1}{\mu_0 c^2}}_{\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \vec{j}_{ext} + \underbrace{\vec{j}_{ind}}_{\vec{\nabla}\times\vec{M} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\underbrace{\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right)}_{\vec{H}} - \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right)}_{\vec{D}} = \vec{j}_{ext}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{ext} \\ &\vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = \vec{j}_{ext} \end{aligned}}$$

Monochromatische Felder und Suszeptibilität

- für monochromatische Felder gilt $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} + c.c.$
- In der Zeitableitung ersetzen wir den Operator einfach mit „$-i\omega$"
- ohne externe Quellen ergibt sich:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} = -i\omega\vec{D}$$

Suszeptibilität: gibt an, wie stark ein Material auf ein äußeres Feld reagiert

$$P_i(\omega,\vec{r}) = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{3} \underbrace{\chi_{ij}}_{\text{Suszeptibilität}} E_j + \underbrace{\varepsilon_0 \sum_{j,k=1}^{3} \chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k}_{\text{nichtlineare Optik}}$$

Es zeigt sich $\quad \varepsilon(\omega,r) = \mathbb{1} + \chi(\omega,r)$

$$\vec{D}(\omega,r) = \varepsilon_0\vec{E}(\omega,r) + \underbrace{\vec{P}(\omega,r)}_{\varepsilon_0\chi(\omega,r)\vec{E}(\omega,r)} = \varepsilon_0\left(\mathbb{1} + \chi(\omega,r)\right)\vec{E}(\omega,r) = \varepsilon_0\,\varepsilon\,\vec{E}(\omega,r)$$

Feldausbreitung

Feldausbreitung

- Definition der Brechzahl: $c_{medium} = \frac{c_{Vak}}{n}$

Wellengleichung: $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{j}$ $\quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{P} = \vec{j}_{ind}\right)$

$$= \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{P}$$

$\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} = -\mu_0 \omega^2 \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\chi \vec{E}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} + \frac{\varepsilon^2}{c^2}\omega^2 \vec{E} = 0$$

Die Wellengleichung sieht aus wie im Vakuum, außer dass $c_{Medium} = \frac{c_{Vakuum}}{\sqrt{\varepsilon}}$

Damit folgt: $\boxed{n = \sqrt{\varepsilon}}$

Änderung der Wellenlänge im Material

$$\lambda_{med} = \frac{\lambda_{vac}}{n}$$